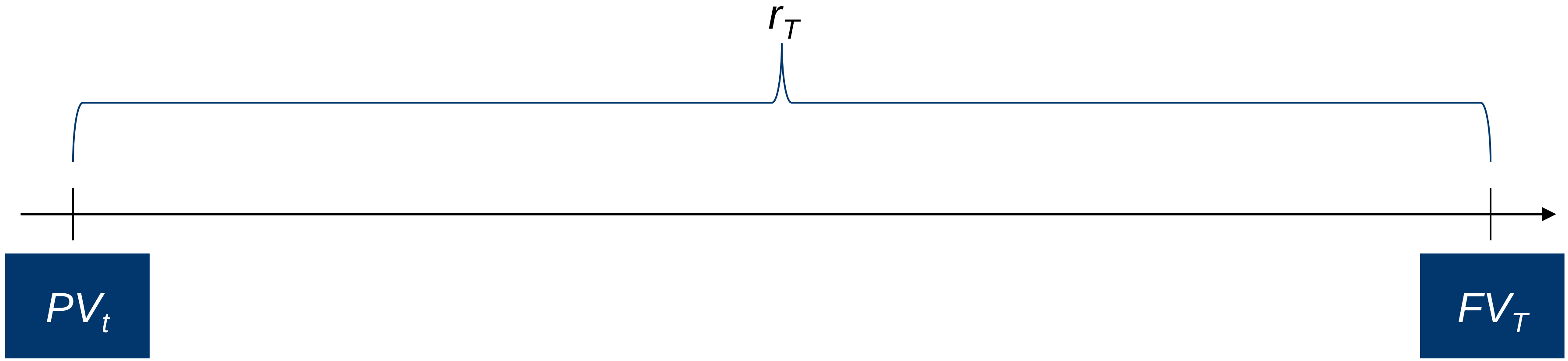
ОСНОВЫ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

В. Пантелеев, PFL
Ф. Наумов, PFL
А. Бутманов, PFL

PV и FV для некоторого периода *(T – t)*

$$FV_T = PV_t(1+r_T) \Leftrightarrow \frac{FV_T}{(1+r_T)} = PV_t$$

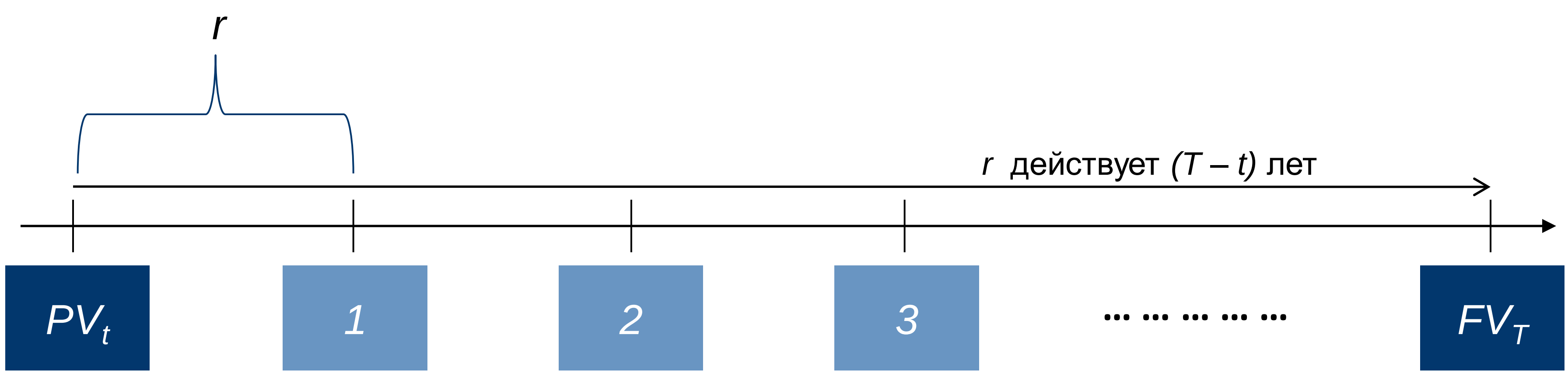
FV_T – будущая стоимость инвестиции;
PV_t – текущая стоимость инвестиции;
r_T – *процентная ставка на некоторый период длинной* $(T-t)$



PV и FV для некоторого периода *(T – t)*

$$FV_T = PV_t(1+r)^{T-t} \Leftrightarrow \frac{FV_T}{(1+r)^{T-t}} = PV_t$$

FV_T – будущая стоимость инвестиции;
PV_t – текущая стоимость инвестиции;
r – годовая процентная ставка для инвестиции на $(T – t)$ лет.



2 очень простые задачи

Задача 1

Выиграв в лотерею, Вы получили 5’000’000 рублей, учитывая налоги. Затем Вы решили инвестировать полученную сумму в банковский инструмент с тем же номиналом, по которому платят 7% годовых. Если %-ты реинвестируются каждый год, сколько Вы получите денег через 5 лет.

Ответ: 7’612’758.65

Задача 2

Менеджер пенсионного фонда оценивает, что через 5 лет его корпоративный клиент сделает вливание в фонд в размере 10’000’000 долларов. Менеджер оценивает годовую процентную ставку около 9% на будущий период в 15 лет. Чему будет равна будущая стоимость инвестиции корпоративного клиента через 15 лет?

Ответ: 23’673’636.75

Ещё 1 очень простая задача на PV

Задача 3

Страховая компания выпустила инструмент, который обеспечит платеж суммой 100’000 долларов через 6 лет. Процентная ставка страховой компании составляет 8%. Сколько нужно будет вложить сегодня данной страховой компании, чтобы выплатить требуемую сумму через 6 лет?

Ответ: 63’016.96

Частота начисления процентов

m – количество раз начисления процентов в год

$$FV_T = PV_t\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m(T-t)} \Leftrightarrow PV_t = \frac{FV_T}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m(T-t)}}$$

m → inf, непрерывное начисление процентов

$$FV_T = PV_t e^{r(T-t)} \Leftrightarrow PV_t = FV_T e^{-r(T-t)}$$

2 очень простые задачки на FV

Задача 4

Ответ: 1’061’677.81

Банк предлагает процентную ставку 6% с начислением процентов каждый месяц. Вы решили инвестировать 1’000’000 долларов на год. Какова будущая стоимость инвестиции?

Задача 5

Ответ: 11’735.11

Предположим, что инвестируя 10’000 долларов на 2 года, Вы можете получить 8% годовых с непрерывным начислением процентов. Какова будущая стоимость инвестиции?

Задача 6

Ответ: 2’748’163.67

Менеджер пенсионного фонда должен сделать выплату в 5’000’000 долларов через 10 лет. Он хочет инвестировать некоторую сумму под процентную ставку 6% при начислении процентов каждый месяц сейчас. Сколько потребуется инвестировать, чтобы через десять лет получить требуемую сумму?

Разберемся еще раз с %-ными ставками

Типы %-ных ставок:

1. Годовая процентная ставка при начислении процентов m раз в год;
2. Годовая процентная ставка не некоторый период времени (например, 9 month annual interest rate);
3. Процентная ставка на некоторый период времени (например на полгода).

$$EAR = (1+r)^m - 1$$

m – может быть дробью

$$EAR = e^r - 1$$

Задача 7

Ответ: 6.090; 6.136

Процентная ставка при начислении процентов *m* раз в год равна 6%, найдите, пожалуйста, *EAR* (эффективную годовую процентную ставку), если *m = 2, 4.*

Периодические выплаты, FV

Важные понятия

Аннуитет – конечный последовательный денежный поток равных сумм.

Обычный аннуитет – платежи начинают поступать в ближайший следующий период.

Аннуитет с выплатой сегодня – название говорит само за себя.

Поток бесконечных выплат (perpetuity) – бесконечный денежный поток равных сумм.

$$FV_T = A\left((1+r)^{N-1} + (1+r)^{N-2} + \ldots + (1+r)^0\right)$$

Периодические выплаты, FV

Будущая стоимость обычного аннуитета:

$$FV_T = A\left[\frac{(1+r)^{T-t}-1}{r}\right]$$

Задача 8

Предположим, что Вы планируете откладывать 20'000 долларов каждый год на старость. У Вас есть возможность вложить данные деньги в ПИФ, который исторически зарабатывает 9% годовых. Если предположить, что данный ПИФ будет показывать такую же доходность следующие 30 лет, сколько будут составлять Ваши накопления через 30 лет?

Ответ: 2'726'150.77

Бесконечные периодические выплаты, PV

$$PV_t = \frac{A}{r}$$

Доказательство

Научившись выводить данную формулу, потом можно переходить к выводу формул аннуитета.

Задача 9

Американское правительство выпустило инструмент, который выплачивает денежные суммы бесконечно. Если данный инструмент платит 100 долларов в год, сколько он должен стоит, исходя из %-ной ставки 5%?

Ответ: 2’000

Периодические выплаты, PV

$$PV_t = \frac{A}{(1+r)} + \frac{A}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{A}{(1+r)^{T-t}}$$

$$PV_t = \frac{A}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^{T-t}}\right)$$

Для стандартного аннуитета

$$PV_t = \frac{Am}{r(m)}\left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{r(m)}{m}\right)^{(T-t)m}}\right)$$

Начисление %-тов m раз в год

Периодические выплаты, PV

Задача 10

Предположим, что вы подумываете о покупки финансового актива, который будет платить Вам 1’000 каждый год в течение пяти лет. Первый платеж через год. Если процентная ставка составляет 12%, сколько стоит данный актив сейчас?

Ответ: 3’604.78

Задача 11

Представим, что Вы уходите на пенсию и Ваша компания предлагает денежный подарок в двух альтернативных вариантах: 2’000’000 долларов сразу или 20 одинаковых платежей по 200’000 долларов в течение последующих лет с непременной первой выплатой. Если процентная ставка составляет 7%, какую альтернативу следует выбрать и почему?

Ответ: 2’267’119.05

Бесконечные периодические выплаты, PV

$$PV_t = \lim_{T \to \infty} \left\{ \frac{Am}{r(m)} \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{r(m)}{m}\right)^{(T-t)m}} \right) \right\}$$

Доказательство $PV_t = \dfrac{A}{r}$

КОНЕЦ ЭТОЙ ТЕМЫ

$$NPV = -CF_0 + \frac{CF_1}{(1+r)} + \frac{CF_2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{CF_T}{(1+r)^{T-t}}$$

CF_0 – денежный поток в начальный момент времени, или инвестиция.

IRR – такая процентная ставка, которая превращает *NPV в 0.*

Задача 12

Ответ: 0.15

Пусть инвестиция в проект составляет 1’000’000 долларов. Проект будет генерировать 150’000 долларов бесконечно каждый год. Чему равна процентная ставка IRR?

Акции и облигации недалеко ушли от простых cash flows!

Для облигации

$$PV_t = \frac{cm}{r}\left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{(T-t)m}}\right) + \frac{A}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{(T-t)m}}$$

$$c = \frac{c\% \times A}{m}$$

c% - купонный доход

Для акции

$$PV_t = \frac{E[D_1]}{r - E[g]}$$

$$g = ROE \times payout\_ratio$$

PFL Project Management

Задача 13

Найдите цену 9%-ной купонной облигации, номинальной стоимостью 1000 долларов, когда до ее погашения остается 20 лет, а требуемая доходность составляет 8%. Купоны платятся каждые полгода.

Ответ: 1098.96

Для облигации в период времени между купонными платежами

$$PV_t = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{i+\omega}} + \frac{A}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n-1+\omega}}$$

PV – цена облигации;
c – купон;
A – номинал;
n – число купонных платежей, остающихся до погашения;
w – отношение числа дней от расчетной даты до очередного купонного платежа к числу дней в купонном периоде.

Задачка

$$PV_t = \frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\omega}}\left[\frac{cm}{r}\left(1+\frac{r}{m}\right)\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n}}\right)+\frac{A}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n-1}}\right]$$

Задача 14

Ответ: 117.49

Пусть дана 10%-ная облигация с полугодовыми купонами номиналом 100 долларов, погашаемая 1 марта 2003 года. Определим, какова была цена этой облигации 17 июля 1997 года при требуемой доходности в 7%. Дивиденды платятся каждые полгода.

между 1 марта и 1 сентября 1997 года – 184 дня;
между 17 июля и 1 сентября 1997 года – 46 дней.

Рассказывает Фёдор Наумов, Аналитик УК «КапиталЪ»

КОНЕЦ ЭТОЙ ТЕМЫ

Владислав Пантелеев, PFL
Аналитик
Инвестиционный Банк ОТКРЫТИЕ
Аспирант РЭА им. Г.В. Плеханова
+7 (916) 213-6134
vp@pflpm.com

Александр Бутманов, PFL
Магистратура РЭА им. Г.В. Плеханова
+7 (903) 242-6570
lex@pflpm.com

Федор Наумов, PFL
Аналитик
УК КапиталЪ
Аспирант РЭА им. Г.В. Плеханова
+7 (909) 936-8373
fa@pflpm.com

PFL Project Management
www.pflpm.com